feuille TD5 exo2

$f(x,y) = x(1-xy)+y$

1/ courbe de niveau 0 de f

$f(x,y)=0$, équivalent à $x(1-xy)+y=0$

équivalent à $x - x^2y + y = 0$

équivalent à $x - y(x^2-1)=0$

soit $x = y(x^2-1)$

soit $y = \frac{x}{x^2-1} = \varphi(y)$, φ est une fonction impaire

$x^2-1=0 \iff x=1$ ou $x=-1$ donc $\varphi(y)$ est définie $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$\varphi(y)=\frac{x}{x^2-1}$ $\quad \varphi'(y) = \frac{1(x^2-1)-2x(x)}{(x^2-1)^2}$ $\quad \varphi'(y)=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

$\varphi'(y)<0$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	‖	$-$	-1	$-$	‖	$-$	
$\varphi(x)$	-0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

2/ courbe de niveau 1

$f(x,y)=1$ équivalent à $x(1-xy)+y=1$

soit $x - x^2y + y - 1 = 0$

$y(1-x^2) = 1-x$

$y = \frac{1-x}{1-x^2}$ pour $x\neq -1, x\neq 1$

$y = \frac{1}{1+x} = \psi(y)$ si $x\neq -1, x\neq 1$

• pour: $x=1$ $\quad 0=0$ $\quad f(1,y) = 1(1-y)+y = 1-y+y = 1 \quad \forall y\in\mathbb{R}$.

• pour $x=-1$ $\quad f(-1,y) = -1(1+y)+y = -1 \neq 1$ impossible.

• pour $x\neq 1$ et $x\neq -1$ $\quad \psi(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad \psi'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad \psi'(x)<0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\psi'(x)$		$-$	‖		$-$			$-$	
$\psi(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0

feuille TD5 exo 2 suite

3/ signe de $f(x,y) - 1 = h(x,y)$

$h(x,y) = x(1-xy) + y - 1$

$h(x,y) = x - x^2y + y - 1$

$h(x,y) = x(1-xy) + y - 1$

$h(0,0) = -1 < 0$

$h(-2;-1) = -2(1+2) + 4 - 1$

$= -2+4-1-1 = 0$

$h(-2;-2) = -2(1-4) - 2 - 1$

$= -2 + 8 - 2 - 1$

$= 3 > 0$

$h(0,2) = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$

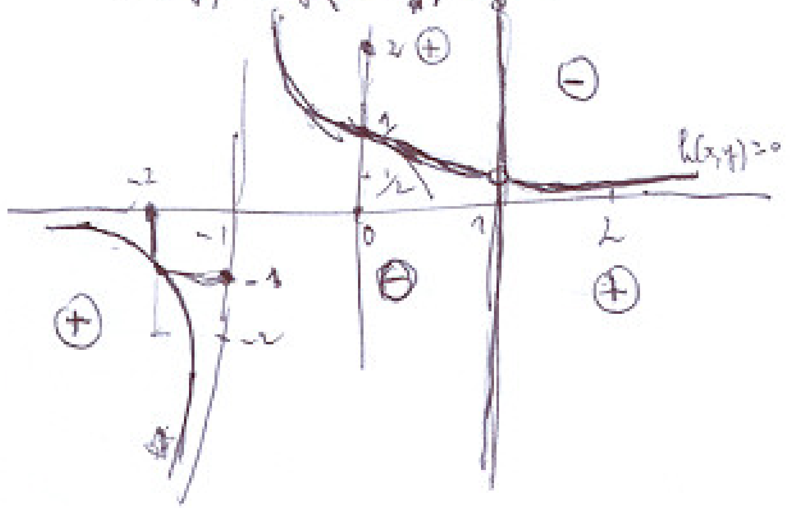
$h(2;1) = 2(1-2) + 1 - 1$

$= 2 - 4 + 0 = -2$

$h(2,-1) = 2(1+2) + -1 - 1$

$= 2 + 4 - 2 = 4$

$h(1,y) = 1(1-y) + y - 1 = 0$



4/ vu le graphique et les signes de $h(x,y)=0$ sur les differentes zones ; il n'y aura pas de maximum local ni de minimum local.

Au pt $(1; \frac{1}{2})$ il y aura un point de selle.

les graphiques : $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{x}{x^2-1}$ $x \neq -1, x \neq 1$

$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$