Licence Sciences Economiques 1ère année **2008-2009**

MATHEMATIQUES **Feuille d'exercices n°5**

I - Juin 2006 - Considérons la fonction f_a de R^2 dans R suivante :

$$f_a(x,y) = -3x^2 - 3y^2 - 3a^2 + 2xy + 2ax + 2ay$$

où a est un paramètre réel quelconque.

1. Montrer que cette fonction n'admet qu'un seul point critique sur R^2.
2. Quelle est la valeur de la fonction f_a en ce point ?
3. Ecrire la fonction f_a sous la forme d'une somme de carrés affectés de coefficients positifs et/ou négatifs.
4. Conclure quant au signe de la fonction f_a sur son domaine de définition.
5. En déduire la nature du point critique trouvé à la première question.

II - Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = x(1-xy) + y$$

1. Etude et représentation graphique de la courbe de niveau 0 de f.
2. Même question pour la courbe de niveau 1.
3. Etudier le signe de $f(x,y) - 1$.
4. La fonction f peut-elle admettre un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

III - Juin 2003 - Soit $q(x,y)$ la fonction de deux variables définie par :

$$q(x,y) = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 5x - 5y - \frac{15}{4}$$

1 - Déterminer les points critiques de $q(x,y)$.
2 - Décomposer $q(x,y)$ en une somme de carrés et en déduire sa nature.
3 - Conclure sur la nature des points critiques de la question 1.

IV - Juin 2005 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,z) = 5x^2 + z^2 + 4xz - 6z + 45$$

On se propose de déterminer, s'ils existent, les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet un point critique (a,b). Calculer (a,b).
2. Soit q la forme quadratique définie par :

$$q(x,y,z) = 5x^2 + z^2 + 4xz - 6yz + 45y^2$$

   (a) Décomposer cette forme quadratique en carrés. Est-elle positive ? définie positive ?
   (b) Remarquer que $f(x,z) = q(x,1,z)$. En déduire que, pour tout (x,z) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,z) \geq 0$.
   (c) La fonction f admet-elle, au point (a,b), un extremum sur $\mathbb{R}^2$?

V - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 2y + 4$$

On se propose de déterminer, s'ils existent, les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet un point critique (a,b). Calculer (a,b).
2. Soit q la forme quadratique définie par : $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$
   (a) Décomposer cette forme quadratique en carrés. Est-elle positive? définie positive?
   (b) Remarquer que $f(x,y) = q(x,y,1)$. En déduire que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq 1$.
   (c) La fonction f admet-elle, au point (a,b), un extremum sur $\mathbb{R}^2$?

VI - Mai 2008 - On considère la fonction f de deux variable réelles définie par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f n'admet qu'un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$, noté (x_0, y_0).
3. En appliquant la même technique à $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ qu'aux formes quadratiques, décomposer $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ en somme de carrés et en déduire la nature du point critique de f.
4. On veut maintenant résoudre le problème d'extremum suivant :

$$\begin{cases} \min f(x,y) \\ \text{sous la contrainte } x + y = 1 \end{cases}$$

   (a) Former le lagrangien du système.
   (b) Trouver les points critiques du lagrangien en résolvant un système par la méthode du pivot.
   (c) Montrer, en se ramenant à une fonction d'une variable, que le problème n'a qu'une seule solution.
5. On modifie légèrement la contrainte. Le problème devient :

$$\begin{cases} \min f(x,y) \\ \text{sous la contrainte } x + y = 1 + \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \text{ est un réel donné.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que le lagrangien n'admet qu'un seul point critique. On admet que ce point est solution du problème.
   (b) Calculer la valeur $\widehat{f}(\varepsilon)$ de ce minimum. Calculer $\dfrac{d\widehat{f}}{d\varepsilon}(\varepsilon)$. Que retrouve-t-on ?

VII - Mai 2007 - Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = e^{-2x^2+4y}$$

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Calculer les dérivées partielles de f.
3. Déterminer la nature de la courbe de niveau k selon les valeurs de k. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de niveau e^4 au point d'abscisse 0 ? Tracer la coube de niveau e^4 et la courbe de niveau $\dfrac{1}{e^4}$.

4. Calculer l'élasticité de f par rapport à x et l'élasticité de f par rapport à y.
5. f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}^2$?
6. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon 1, qui, comme chacun le sait, admet pour équation : $x^2 + y^2 = 1$. On veut étudier les extremas de f sur $\mathcal{C}$.
   (a) Former le lagrangien du problème et montrer que l'on a exactement deux points critiques.
   (b) En calculant le vecteur gradient de f en ces points, et en vous aidant de la question 2, déterminer la nature de ces points critiques.

VIII - Juin 2000 - Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

1. Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f et calculer les limites de la fonction f aux bornes ouvertes de D_f.
2. Calculer la dérivée de la fonction f, étudier son signe et dresser le tableau de variation de cette fonction.
3. Calculer : $a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$. En déduire le comportement de f au voisinage de ses branches infinies.
4. Déduire des questions précédentes la représentation graphique de f dans un repère orthonormal.
5. On considère à présent la fonction de deux variable φ, définie par :

$$\varphi(x, y) = xe^y$$

   On se propose de rechercher les extrémum de la fonction φ sur la branche d'hyperbole Γ d'équation :

$$xy - 1 = 0 \qquad\qquad x > 0$$

   (a) Utiliser le Lagrangien pour déterminer le(s) point(s) critique(s) de φ sur Γ.
   (b) Déduire de l'étude de la fonction f la nature du ou des points critiques de φ sur Γ.