feuille TD 4 exo $\underline{IV}$

Soit f la fonction definie par $f(x) = xe^{-x}$

1/ Etudions sa convexité, c'est à dire étudions le signe de sa dérivée seconde :

$f'(x) = 1.e^{-x} - xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$f''(x) = -e^{-x} - 1e^{-x} + xe^{-x}$

$f''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}(x-2)$

signe de $f''(x)$ = signe de $(x-2)$ car e^{-x} est tj positif

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		concave		convexe	

Etude de la variation de f.

x	~~$-\infty$~~	0		1		2	
$f'(x)$		$+$		0	~~$+$~~	$-e^{-2}$	$-$
$f(x)$	$-2e^{2}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$

Point d'inflexion

$f(1) = e^{-1}$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2e^{-2}$

$f(-2) = -2e^{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2/ $x \in [-2;2]$, $f(x) \leq x$?

remarquons que $f(x) \leq x$ est equivalent à $xe^{-x} \leq x$

- si $x = 0$ $f(0) = 0$ d'où $f(x) \leq x$ pour $x = 0$
- si $x \in [-2;0[$, $x < 0$ alors $xe^{-x} \leq x$ est equivalent à $e^{-x} \geq 1$

soit $1 \geq e^{x}$

or lorsque $x < 0$ $e^{x} \leq 1$

Par ailleurs si $x \in]0;2]$, $x > 0$ alors $xe^{-x} \leq x$ est equivalent à $e^{-x} \leq 1$

soit $1 \leq e^{x}$

or lorsque $x > 0$ on sait que $e^{x} \geq 1$

d'où on peut conclure que si $x \in [-2;2]$ alors $f(x) \leq x$.

3/ sur $[-2;2]$ f prend sa valeur maximale e^{-1} lorsque $x = 1$

sur $[-2;0]$ f prend sa valeur maximale 0 lorsque $x = 0$