feuille ~~TD~~ exo $\overline{\text{VIII}}$

a/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = ?$

on écrit $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \dfrac{e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$

où $e^{-2x} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \infty$

d'où $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

b/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = ?$

remarquons que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$

écrivons $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ avec $\begin{cases} f(x)=\ln(1+x) \\ f'(x)=\frac{1}{1+x} \\ f'(0)=1 \end{cases}$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

c/ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4e^x+x^3-x\ln(x)}{7e^x+e^{-x}+x^7} = ?$

on écrit : $\dfrac{4e^x+x^3-x\ln(x)}{7e^x+e^{-x}+x^7}$ mettons en facteur e^x (le ~~facteur~~ terme qui tend rapidement vers ∞ lorsque x tend vers ∞)

$$\frac{4e^x+x^3-x\ln(x)}{7e^x+e^{-x}+x^7} = \frac{e^x\left[4+\frac{x^3}{e^x}-\frac{x\ln(x)}{e^x}\right]}{e^x\left[7+\frac{e^{-x}}{e^x}+\frac{x^7}{e^x}\right]} = \frac{4+\frac{x^3}{e^x}-\frac{x\ln(x)}{e^x}}{7+\frac{1}{e^{2x}}+\frac{x^7}{e^x}}$$

remarquons que $\dfrac{x^3}{e^x} \longrightarrow 0$ qd $x\longrightarrow +\infty$, ainsi que $\dfrac{x\ln(x)}{e^x} \longrightarrow 0$ qd $x\to\infty$

$\dfrac{1}{e^{2x}} \longrightarrow 0$ qd $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{x^7}{e^x} \longrightarrow 0$ qd $x\longrightarrow\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4e^x+x^3-x\ln(x)}{7e^x+e^{-x}+x^7} \longrightarrow \dfrac{4}{7}$

feuille TD4 exo VIII

d) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x} = \frac{0}{0}$ valeur indeterminée

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x} = ?$

remarque $\frac{e^{(x^2)} - 1}{x} = \frac{e^{(x^2)} - e^0}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \longrightarrow f'(0)$

avec $f(x) = e^{(x^2)}$

et $f'(x) = 2x\left(e^{x^2}\right)$

avec $f'(0) = 0$

d'où $\lim_{x \to 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x} = f'(0) = 0$