LICENCE PREMIERE ANNEE MATHEMATIQUES

FEUILLE D'EXERCICES N° 4

I En économie, on associe à une fonction dite totale (coût total ou recette totale...) définie sur $[0,+\infty[$, la fonction moyenne f_M définie sur $]0,+\infty[$ par $f_M(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et la fonction marginale f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$f(q) = q^3 - 6q^2 + 9q + 32$$
Etudier et représenter dans le même repère les fonctions totale, moyenne et marginale. Vérifier que 4 est un point critique de la fonction moyenne. On précisera les points d'intersection des fonctions totale et moyenne, ainsi que les points d'intersection des fonctions moyenne et marginale.
2. Démontrer que si x^* est un point critique de la fonction moyenne, alors en ce point les fonctions moyenne et marginale coïncident.
3. Si la fonction totale est à dérivée seconde strictement positive sur $[0,+\infty[$, montrer que tout point stationnaire de la fonction moyenne est un minimum de cette fonction.

II La production de x unités d'un bien coûte, en euros :
$$C(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3$$

1. Quelle est l'expression du coût marginal ?
2. Calculer $C'(100)$ et donner la signification de cette valeur.
3. Comparer $C'(100)$ avec le coût de fabrication du $101^{ème}$ objet.
4. Pour quelle valeur la fonction C a-t-elle un point d'inflexion ? Quelle est la signification de ce point ?

III Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)$$

1. Etudier la convexité de f.
2. f admet-elle des extrema sur son domaine de définition ? Sur $[1,2]$? Sur $[-2,1]$?

IV Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = xe^{-x}$$

1. Etudier sa convexité.
2. En déduire que :
$$\forall x \in [-2,2], \quad f(x) \leq x$$
3. Optimiser f sur $[-2,2]$, puis sur $[-2,0]$.

V Calculer les intégrales suivantes quand elles existent :
$$J_1 = \int_0^2 \frac{1}{x-1}dx \quad J_2 = \int_3^4 \frac{1}{2x+1}dx \quad J_3 = \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$$

VI Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1 = \int_1^e x \ln x dx \qquad I_2 = \int_0^1 x e^{-x+3} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \qquad I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

VII On cherche, dans chacun des cas ci-dessous, la fonction totale à partir de la fonction marginale.

1. Coût marginal : $C_m(q) = \dfrac{4q}{\sqrt{1+2q^2}}$ avec un coût fixe de 20.
2. Recette marginale : $R_m(q) = \dfrac{q}{1+q^2}$ liée à la vente de q unités d'un bien.
3. Coût marginal : $C_m(q) = (6q-1)e^{3q^2-q}$ avec un coût fixe de 5.
4. Production marginale $P_m(L) = \dfrac{1}{3L+1}$ pour un niveaude travail L.

VIII Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x + x^3 - x\ln x}{7e^x + e^{-x} + x^7} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - 1}{x}$$

IX La production est donnée en fonction de la quantité de travail fourni par :

$$Q = 5e^{-\frac{1}{L}}$$

Calculer l'elasticité de la production par rapport au travail. On veut augmenter la production de 1 % sachant qu'on se situe au niveau de travail $L_0 = 10$. De combien doit-on faire varier le travail ?

X Déterminer les fonctions dérivables et strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'élasticité est constante.

XI Les fonctions $D(p) = 4\ln\left(\frac{6}{p}\right)$ et $S(p) = 4\ln(2p-1)$ représentent respectivement les quantités de classeurs (en milliers) que les consommateurs sont prêts à acheter et les quantités de classeurs que les producteurs sont prêts à fabriquer (fonctions de demande et d'offre), p désignant le prix unitaire en euro d'un classeur.

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4\ln\left(\frac{6}{p}\right) \geq 0 \\ 4\ln(2p-1) \geq 0 \end{cases}$$

   L'intervalle I solution du système est l'intervalle d'étude du modèle.

2. Quel est le prix d'équilibre p_e, c'est à dire le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales ? Quelle est alors la quantité q_e commune pour l'offre et la demande ?
3. Exprimer p comme une fonction f de D et comme une fonction g de S. Représenter ces fonctions sur un même graphique.
4. On appelle surplus du consommateur le nombre $R = \int_0^{q_e} f(x)dx - p_e q_e$. Calculer R.
5. Donner, en pourcentage, la variation de D pour une augmentation du prix de 1 % à partir de 3 euros.

XII La fonction d'offre est donnée par $q_0 = 6p = 2$ et la fonction de demande par $q_D = 19 - p$. Trouver le prix et la quantité échangés à l'équilibre. Représenter ces deux fonctions en prenant les quantités en abscisse (exprimerr p_0 et p_D en fonction de q). Calculer le surplus du consommateur et du producteur.