TD 1 exo V

Considérons le système (S_m) linéaire où m est un paramètre

$$\begin{cases} 2x + my + z = 1 \\ x + 3y + (m+2)z = -2 \\ 4x + (2m+1)y + 3z = 2 \end{cases}$$

1/ Méthode de Gauss

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 1 & 1 \\ 1 & 3 & m+2 & -2 \\ 4 & 2m+1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & m+2 & -2 \\ 4 & 2m+1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3-\frac{m}{2} & m+2-\frac{1}{2} & -2-\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3-\frac{m}{2} & m+\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{(m \neq 6)}{-\frac{1}{(3-\frac{m}{2})}L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{m+\frac{3}{2}}{3-\frac{m}{2}} & \frac{-\frac{5}{2}}{-(3-\frac{m}{2})} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{2m+3}{6-m} & \frac{5}{6-m} \\ 0 & 0 & 1-\frac{2m+3}{6-m} & \frac{5}{6-m} \end{bmatrix}$$

on arrive au système triangulaire équivalent suivant :

$$S_m \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{m}{2}y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \\ -y - \frac{2m+3}{6-m}z = \frac{5}{6-m} \\ \frac{6-m-2m-3}{6-m}z = \frac{5}{6-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{m}{2}y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} & L_1 \\ -y - \frac{2m+3}{6-m}z = \frac{5}{6-m} & L_2 \\ \frac{3-3m}{6-m}z = \frac{5}{6-m} & L_3 \end{cases}$$

2/ Différents cas :

cas $m=6$ on revient au système original $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & -2 \\ 4 & 13 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ on trouve $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$

cas $m=1$ de L3 on trouve $0z = \frac{5}{5}$ cas impossible d'où Solution $\emptyset$

cas : $m \neq 1$ et $m \neq 6$ alors solution unique en fonction de m, $z = \frac{5}{3-3m}$, $y = \dots$, $x = \dots$

3/ $m=1$ $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 3y + 3z = -2 \\ 4x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$ $A.X = Y$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

La matrice A n'est pas inversible car les 2 dernières colonnes sont identiques (proportionnelles) (colinéaires)