TD2 exo VII

1/ $(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2$

format $(1,2)(2,1) = (1,1)$

$$\left[(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

2/ $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{1}{a^2+b^2} (a, b) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ba \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ba}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

P symetrique si ${}^tP = P$ or ${}^tP = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ba}{a^2+b^2} \\ \frac{ba}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = P$

$P^2 = P$ en effet $P^2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\left[(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^{-1}(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\left[(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^{-1}(a, b)$

$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times I \times \left[(a, b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^{-1} \times (a, b)$

$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \left[(a \;\; b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^{-1}(a \;\; b) = P$

3/ $X = (x \;\; y)$ ${}^tX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a/ $Y = P\,{}^tX = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix}$

on note $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est ce qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $Y = \lambda U$?

~~$\lambda = \ldots$~~

$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x + aby \\ abx + b^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2x + aby = \lambda a(a^2+b^2) \\ abx + b^2y = \lambda b(a^2+b^2) \end{cases}$

donc $\lambda = \frac{a^2x + aby}{a(a^2+b^2)}$ soit $\lambda = \frac{ax + by}{a^2+b^2}$

et $\lambda = \frac{abx + b^2y}{b(a^2+b^2)}$ et $\lambda = \frac{ax + by}{a^2+b^2}$

$\Bigg\} \; \lambda = \frac{ax + by}{a^2+b^2}$

λ existe. donc Y est ~~engendré par~~ sur la droite vectorielle D.

b/ X − Y orthogonal à D ? est ce que produit scalaire $(X - Y).{}^tU = 0$?

on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $X - Y = X - PX = (I - P)X$

$= X - \lambda U$

produit scalaire $(X - \lambda U).{}^tU = 0$?

$(x - \lambda a, y - \lambda b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax - \lambda a^2 + by - \lambda b^2 = \ldots = 0$