Feuille 2

VIII. $Q_1(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + 5xy$ à décomposer en somme de carrés

$$Q_1(x,y) = 4x^2 - 4y^2 + 5xy$$
$$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 5y^2 + xy$$
$$= (2x+y)^2 - 5y^2 + xy$$
$$= (2x+y)^2 - (\sqrt{5}y)^2 + 2\sqrt{5}\,y\,\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= (2x+y)^2 - (\sqrt{5}y)^2 + 2(\sqrt{5}y)\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= (2x+y)^2 - \left[(\sqrt{5}y)^2 - 2(\sqrt{5}y)\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2\right] + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= (2x+y)^2 - \left(\sqrt{5}y - \frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Q_1 est une forme quadratique qui n'est ni positive, ni négative

Veuillez vérifier en redéveloppant la somme algébrique de carrés obtenus.

$$Q_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4xz + 4z^2 + x^2$$
$$= (-x+y-z)^2 + 4z^2 + x^2 - 4xz$$
$$= (-x+y-z)^2 + (2z-x)^2$$

Vérification immédiate :

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4z^2 - 4zx + x^2$$
$$= 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

OK

Ainsi : $Q_2(x,y,z) = (-x+y-z)^2 + (2z-x)^2$

Q_2 est une forme quadratique positive.
