Feuille I exo VIII

deux chaines de montage : A et B.

Evenement : on note A = "objet produit par la chaîne A"

B = "objet produit par la chaîne B"

D = "l'objet produit a un defaut"

Probabilité :
$$\begin{cases} Prob(A) = 60\% \\ Prob(B) = 40\% \\ Prob(D/A) = 1\% \\ Prob(D/B) = 5\% \end{cases}$$

1/ on cherche $Prob(B/D) = ?$

par définition : $Prob(B/D) = \dfrac{Prob(B \cap D)}{Prob(D)} = \dfrac{Prob(D/B) \times Prob(B)}{Prob(D)}$

pour le dénominateur, remarquons que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ deux evenements disjoints reunis

ainsi : $Prob(D) = Prob((D \cap A) \cup (D \cap B)) = Prob(D \cap A) + Prob(D \cap B)$

$= Prob(D/A) \times Prob(A) + Prob(D/B) \cdot Prob(B)$.

Par conséquent : $Prob(B/D) = \dfrac{Prob(D/B) \times Prob(B)}{Prob(D/A) \cdot Prob(A) + Prob(D/B) \cdot Prob(B)}$

Application numérique :

$$Prob(B/D) = \frac{0{,}05 \times 0{,}40}{0{,}01 \times 0{,}6 + 0{,}05 \times 0{,}40} \simeq 0{,}7692 \simeq 77\%$$

il y a donc 77% de chance qu'un objet trouvé defectueux provient de B.

2. a/ X suit $\mathcal{P}_\lambda$ avec $\lambda = 1000$: $Prob(X=k) = e^{-1000} \times \dfrac{(1000)^k}{k!}$

or on sait que $E(\mathcal{P}_\lambda) = \lambda$ et $Var(\mathcal{P}_\lambda) = \lambda$ d'où $E(X) = 1000$

X est la v.a. nbre d'objets produits par A en une journée, et $Var(X) = 1000$

b/ Y est la v.a. egale au nombre d'objets defectueux produits par A en une journée.

Calculons $Pr(Y=k / X=n)$.

- évidemment si $k > n$ (nbre de defectueux produits par A plus grand que le nombre d'objets produits par A) ce cas est impossible d'où $Prob(Y=k/X=n) = 0$ si $k > n$

...

Feuille I exo ~~XVIII~~ suite

- Calcul de $Pr(Y=k / X=n)$ ds le cas $k \leq n$

Cet événement correspond à la répétition n fois d'un phénomène de Bernoulli qui consiste à voir si un ~~projet~~ objet produit est defectueux ou non. Notons Z_i la variable aléatoire correspondant ~~pour~~ le i^{eme} objet produit par A. $Z_i = 1$ si l'objet est défectueux et $Z_i = 0$ sinon $(1 \leq i \leq n)$.

Ainsi $Pr(Z_i = 1) = Pr(D/A) = \frac{1}{100}$ alors $Z_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{100}\right)$

$Pr(Z_i = 0) = \frac{99}{100}$ loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{100}$

Par conséquent : $Pr(Y=k / X=n) = C_n^k \left(\frac{1}{100}\right)^k \left(\frac{99}{100}\right)^{n-k}$ car le nombre d'objets defectueux produits par A ~~suit~~ est la somme des Z_i ~~qui~~ donc c'est la somme de n variables aleatoires de bernoullis independantes ~~et~~ d'où cette somme suit une loi binomiale de parametres n et $\frac{1}{100}$.

c/ Loi de Y. Calculons $Prob(Y=k)$, c'est à dire ~~plus~~ quelle est la probabilité de trouver k produits défectueux ~~pour~~ quel que soit le nombre d'objets produits par A. ainsi, au niveau événement,

$$\{Y=k\} = (\{Y=k\} \cap \{X=1\}) \cup (\{Y=k\} \cap \{X=2\}) \cup (\{Y=k\} \cap \{X=3\}) \cup \cdots \cup (\{X=k\} \cap \{X=n\}) \cup \cdots$$

remarquons : les événements $\{Y=k\} \cap \{X=i\}$ et $\{Y=k\} \cap \{X=j\}$ sont disjoints si $i \neq j$

ainsi

$$Pr(Y=k) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(\{Y=k\} \cap \{X=i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(Y=k / X=i) \times Pr(X=i)$$

or nous savons que $Pr(Y=k / X=i) = 0$ si $k > i$

donc $Pr(Y=k) = \sum_{i=k}^{\infty} Pr(Y=k / X=i) \cdot Pr(X=i)$

...

feuille 1 exo. VIII suite

$$Pr(Y=k) = \sum_{\cancel{k}=k}^{\infty} Pr(Y=k/_{X=i}) \cdot Pr(X=i) = \sum_{i=k}^{\infty} C_i^k p^k q^{i-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

avec $p = \frac{1}{100}$ et $q = \frac{99}{100} = 1-p$

$$= e^{-\lambda} . p^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} \times q^{i-k} \times \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{q^{i-k} \lambda^i}{(i-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{q^{i-k} \lambda^{i-k+k}}{(i-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{q^{i-k} \lambda^{i-k} . \lambda^k}{(i-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{q^{i-k} \lambda^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^j \lambda^j}{j!}$$ si on fait un changement d'indice $j = i-k$

$$= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^j}{j!}$$ or on sait que $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x$ (définition de e^x)

ainsi :

$$Pr(Y=k) = \frac{e^{-\lambda} . (p\lambda)^k}{k!} \times e^{q\lambda} = \frac{e^{-\lambda + \lambda q} (p\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-q)} (p\lambda)^k}{k!}$$

soit $\begin{cases} 1-q = p \\ Pr(Y=k) = e^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-(\lambda p)} . \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{cases}$ ce qui signifie

que Y suit une loi de poisson de paramètre $\lambda p = 1000 \times \frac{1}{100} = 10$

Par conséquent $Y \sim \mathcal{P}_{10}$

le nombre de défectueux parmi les objets produits par A dans une journée suit une loi de poisson de paramètre 10.