Feuille 1

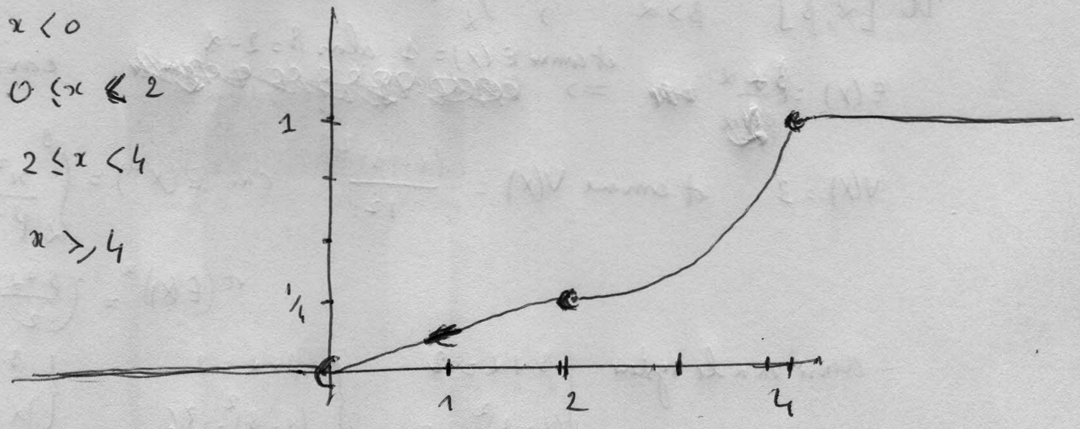
n° V

$F(x) = 0$ si $x < 0$

$F(x) = \frac{x}{8}$ si $0 \leq x \leq 2$

$F(x) = \frac{x^2}{16}$ si $2 \leq x < 4$

$F(x) = 1$ si $x \geq 4$



1/

a/ F est une fonction croissante de $]-\infty ; +\infty[$. et elle est continue.

b/ $0 \leq F(x) \leq 1$

Ces deux conditions suffisent pour dire que on peut prendre F comme fonction de repartition de la v.a.r X.

2/ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x . f(x)\, dx + \int_0^2 x f(x)\, dx + \int_2^4 x f(x) . dx + \int_2^{\infty} x . f(x)\, dx$

or pour $x < 0$ ou $x \in]-\infty ; 0[$ $F(x) = 0$ soit $f(x) = 0$

pour $x \in [0 ; 2[$ $F(x) = \frac{x}{8}$ soit $f(x) = \frac{1}{8}$.

$x \in [2 ; 4[$ $F(x) = \frac{x^2}{16}$ soit $f(x) = \frac{x}{8}$.

$x \in [4 ; \infty[$ $F(x) = 1$ soit $f(x) = 0$

d'où $E(X) = \int_{0}^{2} \frac{x}{8}\, dx + \int_2^4 \frac{x^2}{8}\, dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{24}\right]_2^4 = \frac{4}{16} + \frac{64}{24} - \frac{8}{24} = \frac{62}{24} = \frac{31}{12}$

$= \frac{1}{4} + \frac{56}{24} = \frac{31}{12} \simeq 2,58$

et $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

ainsi avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\, dx + \int_0^2 x^2 f(x)\, dx + \int_2^4 x^2 f(x)\, dx + \int_4^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

$E(X^2) = \int_0^2 \frac{x^2}{8}\, dx + \int_2^4 \frac{x^3}{8}\, dx = \left[\frac{x^3}{24}\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{32}\right]_2^4 = \frac{8}{24} + \frac{256}{32} - \frac{16}{32} = \frac{94}{12} \simeq 7,83$

Soit $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left(\frac{94}{12}\right) - \left(\frac{31}{12}\right)^2 = \frac{167}{144} \simeq 1,16$