feuille 2 exo VII

On note ~~R~~ le poids d'un pruneau. R est une v. a. $R \sim N(20, 2^2)$

1. Calculons ~~[illegible]~~ $\mathrm{Prob}\left(|R - E(R)| > \frac{10}{100} E(R)\right)$

$$\mathrm{Prob}\left(|R - E(R)| > \frac{E(R)}{10}\right) = 1 - \mathrm{Prob}\left(|R - E(R)| \leq \frac{E(R)}{10}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{Prob}\left(E(R) - \frac{E(R)}{10} \leq R \leq E(R) + \frac{E(R)}{10}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{Prob}\left(-\frac{E(R)}{10\sigma} \leq N(0,1) \leq \frac{E(R)}{10\sigma}\right)$$ après centrage et reduction.

$$= 1 - \mathrm{Prob}\left(-\frac{20}{20} \leq N(0,1) \leq \frac{20}{20}\right) = 1 - (2\Pi(1) - 1) = 2 - 2\Pi(1)$$

$$= 2(1 - \Pi(1)) = 0{,}3173 \approx 31{,}7\%$$

2. Poches de 25 pruneaux : son poids en pruneau P est aléatoire

On note $R_i$ le poids du $i^{\text{ème}}$ pruneau $R_i \sim N(20, 2^2)$

$$P = R_1 + R_2 + \dots + R_{25} = \sum_{i=1}^{25} R_i$$

$E(P) = E\left(\sum_{i=1}^{25} R_i\right) = \sum_{i=1}^{25} E(R_i)$ car l'esperance est linéaire

$$E(P) = \sum_{i=1}^{25} 20 = 25 \times 20 = 500$$

$\mathrm{Var}(P) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{25} R_i\right) = \sum_{i=1}^{25} \mathrm{Var}(R_i)$ car on fait l'hypothèse que les $R_i$ sont independantes

$$\mathrm{Var}(P) = \sum_{i=1}^{25} 2^2 = 25 \times 4 = 100$$

et comme P est somme de variables aleatoires normales indépendantes donc P est une variable normale. $P \sim N(E(P), \mathrm{Var}(P))$

$P \sim N(500, 100)$

3) "Poche defectueuse" $\Leftrightarrow$ "$P \leq 487$"

a/ $\mathrm{Prob}(\text{Poche defectueuse}) = \mathrm{Prob}(P < 487) = \mathrm{Prob}\left(\frac{P - 500}{10} \leq \frac{487 - 500}{10}\right)$ après centrage et reduction

$= \mathrm{Prob}(N(0,1) < -1{,}3) = 0{,}0968$

On lit sur la table $\mathrm{Prob}(N(0,1) < -1{,}3) = 1 - \Pi(1{,}3) = 1 - 0{,}9032$

b/ On note $X_i$ la variable aleatoire de Bernoulli qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ poche est defectueuse : $\mathrm{Prob}(X_i = 1) = \mathrm{Prob}(P_i < 487) = p = 0{,}0968$

sinon $X_i = 0$ $\quad X_i \sim B(0{,}0968)$

TD 2 exo VII suite

3 b/

on note $N$ la variable aleatoire nombre de poches defectueuse. $N = X_1 + X_2 + \dots + X_{20}$ où $X_i \sim B(p)$

$N$ etant la somme de 20 variables de Bernoulli independants

alors $N \sim B(n, p) \sim B(20, 0{,}0968)$

On cherche $\text{Prob}(N \geq 3)$. (3 poches au moins sont defectueuses)

$$\text{Prob}(N \geq 3) = 1 - \text{Prob}(N < 3) = 1 - \text{Prob}(N \leq 2)$$

$$= 1 - \left( C_{20}^0 p^0 (1-p)^{20} + C_{20}^1 p^1 (1-p)^{19} + C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18} \right)$$

$$= 1 - 0{,}6951$$

$$= 0{,}3049 \simeq 30{,}49\ \%$$

4. on veut qu'au moins 95% des poches aient un poids superieur à 500 g

On cherche le nombre minimal de pruneaux dans la poche

On note $n'$ le nombre de pruneaux ds la poche. On cherche $n'$.

le poids de la poche : $P'$, $P' = \sum_{j=1}^{n'} R_j$ $R_j$ poids du $j^{\text{ème}}$ pruneau

On veut que $P'_i > 500$ où $P'_i$ poids de la $i^{\text{ème}}$ poche

on note $X'_i$ la vaa tq $X'_i = 1$ si $P'_i > 500$

on note $N'_i$ le nombre de poches ayant un poids superieur à 500 g

En somme, on veut que $\text{Prob}(P' > 500) \geq 95\%$

or $P' = \sum_{j=1}^{n'} R_j$ où $R_j \sim N(20, 2^2)$ independants donc $P' \sim N(n'20, n'2^2)$

$\text{Prob}(P' > 500) \geq 95\% \Leftrightarrow \text{Prob}\left(N(0,1) \geq \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right) \geq 95\%$

$\Leftrightarrow \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right) \leq 0{,}05$ d'où $\frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}} = t = -1{,}6449$ d'où $n' \geq 26$

Détails des calculs

$$\text{Prob}(P' > 500)$$

$$\text{Prob}\left(\frac{P' - n'20}{\sqrt{n'} \times 2} > \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right) \geq 95\%$$

$$\text{Prob}\left(N(0,1) > \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right) \geq 95\%$$

$$1 - \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right) \geq 95\%$$

---

$$0{,}05 \geq \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}}\right)$$

$$0{,}05 \geq \text{Prob}(N(0,1) \leq t)$$

on lit sur la table : $t = -1{,}6448536$

$$\frac{500 - 20n'}{2\sqrt{n'}} = -1{,}64485 = t$$

$$500 - 20n' + 2t\sqrt{n'} = 0$$

$$20n' + 2t\sqrt{n'} - 500 = 0$$

on pose $\ell^2 = n'$, $\ell = \sqrt{n'}$, $\ell > 0$

$$20\ell^2 + 2t\ell - 500 = 0$$ équat° du second degré

$\ell_1 = 5{,}08$ $\quad n' = 25{,}84$

$\ell_2 = -4{,}918$ impossible

END