TD exo VI
2

Une tomate : Son poids $P \sim \mathcal{N}(150, 10^2)$ $\qquad \frac{P-150}{10} \sim \mathcal{N}(0,1)$

1. $\text{Prob}(P \geq 170) = \text{Prob}(P \geq 170)$

$= \text{Prob}\left(\frac{P-150}{10} \geq \frac{170-150}{10}\right)$ on centre et on réduit

$= \text{Prob}(\mathcal{N}(0,1) \geq 2) = 1 - \text{Prob}(\mathcal{N}(0,1) \leq 2) = 0{,}228$

car lu sur la table $\pi(2) = 0{,}9772$ $\quad \approx 2{,}3\,\%$

$\text{Prob}(130 \leq P \leq 170) = \text{Prob}\left(\frac{130-150}{10} \leq \frac{P-150}{10} \leq 2\right)$

$= \text{Prob}(-2 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 2) = \pi(2) - (1-\pi(2)) = 2\pi(2) - 1$
$= 0{,}9544$

car $\pi(-2) = 1 - \pi(2)$

2. chercher σ_2 tq : $\text{Prob}(145 \leq P_2 \leq 155) = 0{,}95$

$\text{Prob}\left(\frac{145-150}{\sigma} \leq \mathcal{N}(0,1) \leq \frac{155-150}{\sigma}\right) = 0{,}95$: $\sigma = 2{,}55$

en effet sur la table de la loi normale le t telle que $\pi(t) - \pi(-t) = 0{,}95$ correspond à $2\pi(t) - 1 = 0{,}95$ soit $\pi(t) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$ ce $t = 1{,}96$ donc $\frac{5}{\sigma} = 1{,}96$ soit $\sigma = \frac{5}{1{,}96} = 2{,}55$

3. Dans une caisse, il y a 32 unités de tomates. Chacune des tomates pèsent respectivement $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{32}$ telle que $\forall i \in [\![1, 32]\!]$ $E(P_i) = 150$

Ainsi le poids moyen d'une caisse sera $E(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{32})$

$= E(P_1) + E(P_2) + \dots + E(P_{32})$ car l'espérance est linéaire donc le poids moyen d'une caisse : 32×150 car $\forall i \in [\![1; 32]\!]$, $E(P_i) = 150$

soit $4800\,g$ (4Kg800)

4. la machine étant reglée comme au 1°) c'est à dire $P_i \sim \mathcal{N}(150, 10^2)$, $\forall i$

on cherche la probabilité qu'une caisse pèse entre $4600\,g$ et $5000\,g$.

Notons C la v.a poids d'une caisse de tomates. $C = \sum_{i=1}^{32} P_i$.

cherchons la loi de probabilité de C.

$E(C) = 4800$ (vu question 3), $\text{Var}(C) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{32} P_i\right) = \sum_{i=1}^{32} \text{Var}(P_i)$ car on fait l'hypothèse que les poids des tomates sont indépendantes, d'où

$\text{Var}(C) = \sum_{i=1}^{32} \sigma^2 = 32 \times \sigma^2 = 32 \times 10^2$ $\qquad \sigma_C = 10 \times 4\sqrt{2} = 40\sqrt{2} = 56{,}56$.

Par ailleurs C est une somme de 32 variables aléatoires <u>indépendantes</u> suivant la même loi normale. donc C suit $\mathcal{N}\left(E(\sum P_i), \text{Var}(\sum P_i)\right)$

TD$_2$ exo <u>VI</u> suite

Ainsi $C \sim N(4800, 32 \cdot 10^2)$ où $32.10^2 = 3200$ et $\sigma = \sqrt{3200} = 40\sqrt{2}$

Nous cherchons $\text{Prob}(4600 \leq C \leq 5000)$.

$$\text{Prob}(4600 \leq C \leq 5000) = \text{Prob}\left(\frac{4600-4800}{40\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{5000-4800}{40\sqrt{2}}\right)$$

après centrage et reduction.

$$= \text{Prob}\left(\frac{-200}{40\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{200}{40\sqrt{2}}\right)$$

$$= \text{Prob}\left(-\frac{5}{\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \Pi\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \Pi\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 2\Pi\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

$$= 2\Pi(3{,}53) - 1 \approx 0{,}9998$$

$$\text{Prob}(4{,}6\,\text{Kg} \leq C \leq 5\,\text{Kg}) \simeq 0{,}9995 \simeq 99{,}95\,\%$$