LICENCE Sciences Economiques $2^{ième}$ année - Statistiques II
Feuille d'exercices n° 2 : Rappels sur les variables aléatoires et les lois de probabilité (deuxième partie) et convergences stochastiques.

I - 500 personnes ont postulé pour un emploi mais 379 d'entre elles ont été refusées parce qu'elles n'étaient pas assez grandes. La taille d'un individu suivant une loi normale d'espérance 171,5 cm et d'écart-type 5 cm, déterminer la taille minimale exigée pour l'emploi proposé.

II - Une machine fabrique en grande série des disques en verre dont le diamètre doit être de 30 mm. On admet que la variable aléatoire égale au diamètre d'un disque pris au hasard suit sensiblement une loi normale de moyenne $m = 30$ mm et d'écart-type $\sigma = 0.18$ mm.

1. Calculer la probabilité que le diamètre d'un disque pris au hasard soit compris entre 29,9 mm et 30,1 mm.
2. Comment modifier σ pour que 95 % de la production ait un diamètre compris entre 29,9 mm et 30,1 mm ? La machine est dorénavant réglée ainsi.
3. On prélève un échantillon aléatoire de 25 disques, et on accepte ceux dont le diamètre est compris entre 29,9 mm et 30,1 mm. Quelle est la probabilité qu'au moins 22 disques soient acceptés ?
4. On appelle $\overline{X}_{25}$ la moyenne aléatoire des 25 disques prélevés ($\overline{X}_{25} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i$ où X_i désigne le diamètre du $i^{\text{ème}}$ disque prélevé). Quelle est la loi de $\overline{X}_{25}$ (justifier la réponse) ? Calculer $\Pr(|\overline{X}_{25} - 30| \geq 0.1)$.

III - Soit X une v.a.r. suivant une Loi Normale d'espérance m et d'écart-type σ. On donne les informations suivantes :

$$\begin{aligned} prob\{X \leq 2\} &= 0,5793 \\ prob\{X \geq 5\} &= 0,2119 \end{aligned}$$

Déterminer les valeurs de m et de σ.

IV - Soit X une v.a.r. uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Soit Y la v.a.r. définie par $Y = X^2$.

1. Déterminer une fonction de densité de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

V - Les compagnies aériennes admettent que le poids d'un passager choisi au hasard peut être considéré comme une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 70 kilogrammes et d'**écart-type** 8 kg, alors que celui de ses bagages suit une loi normale de moyenne 15 kg et d'**écart-type** 4 kg.

1. En supposant ces deux variables indépendantes, quelle est la loi suivie par la variable égale au poids total d'un passager et de ses bagages ? Quelle est la probabilité que ce poids dépasse 80 kg ? Dépasse 100 kg ? (On prendra $\sqrt{5} \simeq 2,2$).
2. 100 passagers prennent un avion. En précisant les hypothèses utilisées, calculer la probabilité pour que le poids total des 100 passagers et de leurs bagages n'excède pas 8600 kg.
3. Pour des raisons de sécurité, la compagnie voudrait que ce poids total ne dépasse 8600 kg que dans moins de 1 % des cas. Quel doit être alors le nombre maximum de passagers que l'avion peut accueillir (on se contentera de trouver une équation, sans la résoudre).

VI - Une machine calibre des tomates. On estime, à la suite d'études statistiques, que le poids d'une tomate calibrée prise au hasard peut être considéré comme une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 150 g et d'écart-type 10 g.

1. Quelle est la probabilité qu'une tomate pèse plus de 170 g ? Entre 130 et 170 g ?
2. Un meilleur réglage de la machine permet de modifier l'écart-type. Comment faut-il régler la machine pour que la probabilité que le poids d'une tomate prise au hasard soit compris entre 145 g et 155 g, soit de 0,95 ?
3. Ces tomates sont mises dans des caisses de 32 unités. Quel est le poids moyen d'une caisse ?
4. En supposant la machine réglée comme dans 1°), quelle est la probabilité qu'une caisse ait une masse comprise entre 4,6 kg et 5 kg ? (On justifiera soigneusement les calculs. On donne : $\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.53$).

VII - On admet qu'une fois séché, un pruneau pris au hasard a une masse que l'on peut considérer comme une variable aléatoire suivant sensiblement une loi normale de moyenne 20 grammes et d'écart-type 2 grammes.

1. Quelle est la probabilité que le poids d'un pruneau s'écarte de sa valeur moyenne de plus de 10 % ?
2. On remplit des poches de 25 pruneaux. En notant P la variable aléatoire représentant le poids en pruneaux d'une poche, déterminer complètement la loi suivie par la variable aléatoire P.
3. Une poche est déclarée défectueuse si elle pèse moins de 487 g.
   (a) Quelle est la probabilité qu'une poche quelconque prise au hasard soit défectueuse ?
   (b) Sur 20 poches choisies au hasard, quelle est la probabilité que 3 au moins soient défectueuses ?
4. On abandonne le système précédent et, pour ne pas léser le consommateur, on veut qu'au moins 95 % des poches aient un poids supérieur à 500 grammes. Quel est le nombre minimal de pruneaux par poche pour que cette condition soit remplie ?

VIII - Vérification de la loi faible des Grands Nombres

Le jeu de Pile ou Face suppose que l'occurence de chacune des deux éventualités lors du jet d'une pièce est équiprobable. On se propose dans le cadre d'un tel jeu portant sur un nombre important de jets, de "vérifier" théoriquement (expression bizarre !) la loi des Grands nombres de Bernoulli.

1. Montrer que l'énoncé même de cette loi implique deux méthodes d'approche (ou type d'événements à observer ou encore, phénomènes à repérer).

2. En déduire qu'une telle vérification passe par le calcul :
   (a) pour un intervalle donné, de la probabilité que la fréquence de Pile soit contenue dans cet intervalle, lors de n épreuves,
   (b) pour une probabilité donnée, des bornes d'un intervalle de confiance ayant une probabilité donnée de contenir la fréquence de Pile, lors de n épreuves, en donnant à n des valeurs croissantes.
3. Opérer cet ensemble de calculs pour :

   - un intervalle pour la fréquence, délimité (bornes incluses) par les valeurs 0,4 et 0,6 **(cas a)** ;
   - une probabilité donnée de 0,95 (**cas b**) ;

n valant respectivement 10, 100 et 400.

IX - Quel doit être le nombre minimum de lancers de deux dés ordinaires pour que la probabilité que la fréquence de survenance d'un total qui soit un multiple de trois, s'écarte de la valeur attendue de plus de 10% de cette valeur, ne dépasse pas 5% ?

X - Une personne joue 60 fois à "Pile ou Face". Au bout de 30 lancers, elle a obtenu 20 fois Pile.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance du nombre total de Pile obtenu au terme des 60 coups.
2. En déduire une remarque que l'on peut faire à un joueur dont la tactique consiste à parier à chaque coup sur la face contraire à celle sortie au coup précédent, et qui justifie son attitude par le fait qu'en définitive, on doit obtenir autant de fois Pile que Face.

XI - Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 3$ et $E[X^2] = 13$. Déterminer la borne inférieure de la probabilité α où $\alpha = prob\{-2 < X < 8\}$.

XII - Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres n et p.

1. Si $n = 50$ et $p = 0.4$, calculer $prob\{X \leq 25\}$ à l'aide de la table de la loi binomiale. Comparer cette valeur avec celles données par les approximations de Poisson et Normale.
2. Si $n = 50$ et $p = 0.05$, calculer $prob\{X \leq 5\}$ à l'aide de la table de la loi binomiale. Comparer cette valeur avec celles données par les approximations de Poisson et Normale.

XIII - (Extrait Mai 2008) On fournit l'extrait suivant d'une table de nombres au hasard :

9918 0808 4207 2743 5793 7881

1. On désire simuler l'obtention d'une valeur particulière d'une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
   (a) Présenter rapidement la méthode permettant d'y parvenir à l'aide des informations à votre disposition (les étudiants ne disposaient que de la table de Poisson de paramètre $\lambda = 1$) .
   (b) Appliquer cette méthode pour simuler l'obtention de cette valeur particulière.
2. On désire maintenant simuler l'obtention de 5 valeurs particulières d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 25$.
   (a) Présenter la méthode à employer en justifiant soigneusement votre réponse.
   (b) En notant $X_i \quad (i = 1, ..., 5)$ ces 5 valeurs, réaliser la simulation demandée et calculer $\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$.

XIV - (Session de Mai 2005)
Au second tour d'une élection nationale, un des deux candidats, le candidat A, obtient 6 695 000 voix sur les 13 000 000 de suffrages exprimés.

1. La veille du vote, un institut de sondage annonçait la victoire du candidat B sur la base d'un échantillon représentatif de 100 personnes. Evaluer la probabilité qu'avait cet institut de se tromper. Toute la démarche permettant de parvenir au résultat sera développée.
2. Quelle aurait été cette même probabilité si l'institut avait prélevé un échantillon représentatif de 1600 personnes ?
3. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

Rappel des conditions générales d'approximation

Approximation		**Conditions**
de variable :	par variable :	
$H(N,n,p)$	$B(n,p)$	N grand et n faible par rapport à N. Pratiquement $N > 10n$.
$B(n,p)$	$P_{\lambda=np}$	$n > 30$, $p < \frac{1}{10}$, avec $np = \lambda = Cste$ et $np < 15$.
$B(n,p)$	$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$	$n > 30$, p ni trop voisin de 0 ni de 1, $np > 15$ et $nq > 15$
P_λ	$N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$	$\lambda > 15$