feuille TD3 exo IX

- population A, effectif de A : très grand : N_A très grand
- X v.a : taille d'un individu qcq X en cm
- $E(X) = m_A$, $Var(X) = \sigma_A^2$
- Echantillon aléatoire de ~~taille~~ d'effectif 100 : $n = 100$
- $\overline{X}^A_{100}$ la taille moyenne des individus de l'échantillon

1/ $\overline{X}^A$ a une loi de probabilité qui s'approche d'une loi normale lorsque n devient grand. et comme $n = 100$ $n > 30$
on peut admettre que $\overline{X}^A_{100}$ suit une loi normale.
Tout ceci grâce au théorème central limite.

2/ Par contre le théorème central limite ne fait pas d'une condition nécessaire de son application le fait que les v.a. X_i suivent une loi normale. Donc X n'est pas obligé de suivre une loi normale.

3/ . On donne $E(\overline{X}^A_{100}) = 175$ et $\sigma_{\overline{X}^A_{100}} = 5$

. cf cours : $E(\overline{X}^A_{100}) = E(X) = m_p$ donc $E(X) = 175 = m_p$

. cf cours : $\sigma_{\overline{X}^A_{100}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{100}}$ donc $\sigma_X = \sigma_{\overline{X}^A_{100}} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50$

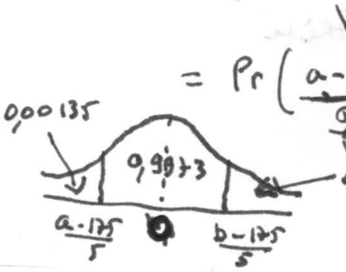
4/ Construire intervalle $[a, b]$ telle que $Prob(\overline{X}^A_{100} \in [a; b]) = 0{,}9973$

soit $Pr(a \leq \overline{X}^A_{100} \leq b) = 0{,}9973$

$$Pr(a \leq \overline{X}^A_{100} \leq b) = Pr(a - m_p \leq \overline{X}^A_{100} - m_p \leq b - m_p)$$: centrage

$$= Pr\left(\frac{a - m_p}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{100}}} \leq \frac{\overline{X}^A_{100} - m_p}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{100}}} \leq \frac{b - m_p}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{100}}}\right)$$: réduction

$$= Pr\left(\frac{a - m_p}{5} \leq N(0,1) \leq \frac{b - m_p}{5}\right) = Pr\left(\frac{a - 175}{5} \leq N(0,1) \leq \frac{b - 175}{5}\right)$$



donc on cherche b tq : $Pr\left(N(0,1) \leq \frac{b - 175}{5}\right) = 0{,}9973 + 0$
$= 0{,}99865$

on lit sur la table $N(0,1)$: $\frac{b - 175}{5} = 2{,}9999926 \simeq 3$ d'où $b = 190$ et

5. cherchons n tq : $\text{Prob}(a < \bar{X}_n^A < b) = 0{,}95$

$$\text{Prob}(a < \bar{X}_n^A < b) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \text{Prob}\left(\frac{a - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}_n^A - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \leq \frac{b - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \right) = 0{,}95$$ après centrage et reduction. et $\bar{X}_n^A$ v.a. continue

$$\Leftrightarrow \text{Prob}\left(\frac{a - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \leq N(0,1) \leq \frac{b - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \right) = 0{,}95$$

et on lit sur la table $N(0,1)$ que $\dfrac{b - m_p}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} = 1{,}96$

avec $b = 190$, $\sigma_x = 50$, $m_p = 175$

alors $\sqrt{n} = \dfrac{1{,}96 \times 50}{15} = 6{,}53$ soit $n \simeq 43$

6. Seconde population B : N_B effectif de B, très grand.

$E(X) = m_B = 170$

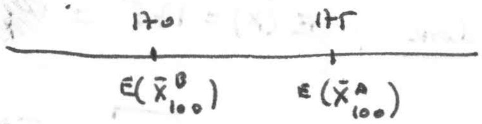
$\text{Var}[X] = \sigma_B^2 = ?$

echantillon de taille $n : 100$

$\bar{X}_{100}^B$: moyenne aléatoire de l'échantillon,

la loi de $\bar{X}_{100}^B$ s'approche de la loi normale $N\left(m_B, \frac{\sigma_B^2}{100}\right)$ car

d'après TCL (Théorème Central Limite) qd $n \longrightarrow \infty$ Loi de $\bar{X}_n^B \longrightarrow$ Loi $N\left(m_B, \frac{\sigma_B^2}{n}\right)$



on cherche σ_B tq $\text{Prob}(\bar{X}_{100}^A > \bar{X}_{100}^B) = 0{,}6915$

$\text{Prob}(\bar{X}_{100}^A > \bar{X}_{100}^B) = 0{,}6915 \Leftrightarrow \text{Prob}(\bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A < 0) = 0{,}6915 \Leftrightarrow \text{Prob}(\bar{D} < 0)$

si on note $\bar{D} = \bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A$ $\quad \bar{D} \sim N\left(E(\bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A), \text{Var}(\bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A)\right)$

car $\bar{D}$ combinaison linéaire de deux variables aleatoires indépendantes suivant chacune une loi normale.

$E(\bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A) = E(\bar{X}_{100}^B) - E(\bar{X}_{100}^A) = 170 - 175 = -5$ linéarité de l'Espérance

$\text{Var}(\bar{X}_{100}^B - \bar{X}_{100}^A) = \text{Var}(\bar{X}_{100}^B) + \text{Var}(-\bar{X}_{100}^A)$ $\Big\{$ indépendance de $\bar{X}_{100}^B$ et $-\bar{X}_{100}^A$ car $\bar{X}_{100}^B$ et $\bar{X}_{100}^A$ sont independan[ts] par hypothèse

$= \text{Var}(\bar{X}_{100}^B) + \text{Var}(\bar{X}_{100}^A)$ car $\text{Var}(aY) = a^2 \text{Var}\, Y$

$= \dfrac{\sigma_B^2}{100} + \dfrac{\sigma_A^2}{100}$

$= \dfrac{\sigma_B^2}{100} + 25$

Feuille TD 3 exo IX suite

$$\text{Prob}(\bar{D} < 0) = 0{,}6915 \iff \text{Prob}\left(\frac{\bar{D}+5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}} \leq \frac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}}\right) = 0{,}6915$$

après centrage et réduction

$$\iff \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}}\right) = 0{,}6915$$

et on lit sur la table de $N(0,1)$ $\dfrac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}} \simeq 0{,}50$

soit $\dfrac{5}{0{,}5} \simeq \sqrt{\dfrac{\sigma_B^2}{100}+25}$

Soit $100 = \dfrac{\sigma_B^2}{100} + 25$ $\qquad \sigma_B^2 = 75 \times 100 = 25 \times 3 \times 100$

$\sigma_B = 5 \times 10 \times \sqrt{3} \simeq 85$

c : Valeur maximale de $\text{Prob}(\bar{D} < 0)$.

$\text{Prob}(\bar{D} < 0) = \text{Prob}(\bar{X}^A_{100} > \bar{X}^B_{100})$ avec $\bar{D} = \bar{X}^B_{100} - \bar{X}^A_{100}$

Remarquons que $\text{Prob}(\bar{D} < 0) = \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \dfrac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}}\right)$ cf question précédente

si σ_B est inconnu, $\sigma_B > 0$, donc : $\dfrac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}} < \dfrac{5}{\sqrt{\frac{0}{100}+25}}$

et comme la fonction de répartition de $N(0,1)$ est croissante.

alors $\Pi\left(\dfrac{5}{\sqrt{\frac{\sigma_B^2}{100}+25}}\right) \leq \Pi\left(\dfrac{5}{\sqrt{\frac{0}{100}+25}}\right)$

donc $\text{Prob}(\bar{D} < 0) \leq \text{Prob}(N(0,1) < 1) = \Pi(1)$

soit $\text{Prob}(\bar{D} < 0) \leq 0{,}8413447$

Valeur maximale de $\text{Prob}(\bar{X}^A_{100} > \bar{X}^B_{100})$ est $0{,}8413447$