feuille 3 exo IV

Soit x_i la variable statistique, poids du $i^{ème}$ poire, on note ~~m~~ $= \bar{x} = 120g$ la moyenne statistique ~~des~~ poids de ces poires et $\sigma = 12g$ son écart type.

Notons X_i, le poids d'une poire se trouvant dans une cagette, $i \in \{1, 2, \dots, 25\}$

X_i étant inconnue à priori, X_i est une variable aléatoire.

On a $E(X_i) = m$ et $Var(X_i) = \sigma^2$ soit $E(X_i) = 120\,g$ et $Var(X_i) = 144$.

Notons P, le poids d'une cagette de ~~poires~~ 25 poires. La valeur de P étant inconnue a priori P est une variable aléatoire avec $P = \sum_{i=1}^{25} X_i$, P étant la somme ~~des~~ ~~ces~~ X_i, $i \in \{1, 2, \dots, 25\}$

1/ on demande de calculer : $Prob(P \leq 2900g)$ soit $Prob\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \leq 2900\right)$.

L'énoncé ne précise pas quelle loi suit chaque X_i, par contre on connait $E(X_i) = 120$ et $Var(X_i) = 144$. On fait l'hypothèse que les X_i suivent une même loi d'esperance 120 et d'ecart-type 12. On fait aussi l'hypothèse aussi que les X_i sont indépendantes.

Sous ces hypothèses que nous venons de rajouter, on aurait pu utiliser le théorème central limite pour conclure que ~~$\sum_{i=1}^{25} X_i$~~ la loi de $\sum_{i=1}^{25} X_i$ peut être approximée par la loi Normale $N\left(E\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right), Var\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)\right)$ mais l'effectif $\underline{25}$ étant au dessous de $\underline{30}$ généralement conseillés ne permet pas l'utilisation du théorème central limite sauf en connaissance de cause dans le cas où on ne peut pas vraiment faire une hypothèse plausible sur la loi que suivent les X_i.

Ceci étant, on peut rajouter l'hypothèse assez plausible que chaque X_i suit ~~suivent~~ la loi normale $N(120, 144)$.

Dans le cadre de ces hypothèses ~~citées~~ prises ci-dessus, $\sum_{i=1}^{25} X_i$ qui est une somme de variables aléatoires indépendantes X_i suivant la même loi normale $N(120, 144)$, $\sum_{i=1}^{25} X_i$ suit une loi normale de paramètres $E\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)$ et $Var\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)$

avec $E\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} E(X_i)$ car Esperance est linéaire donc : $E\left(\sum X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} m = 25 \times m = 25 \times 120$

et $Var\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} Var(X_i)$ car les X_i sont independants donc $Var\left(\sum X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} \sigma^2 = 25 \times 144 = 3600$

Ainsi $P = \sum_{i=1}^{25} X_i$ et $P \sim N(3000, 3600)$

…/…

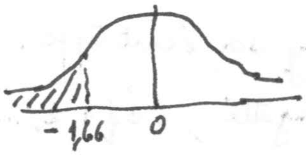
Feuille 3 exo V suite p2

Par conséquent : $Prob(P \leq 2900) = Prob\left(\frac{P-3000}{\sqrt{3600}} \leq \frac{2900-3000}{\sqrt{3600}}\right)$

soit $Prob\left(N(0,1) \leq \frac{-100}{60}\right) = Prob\left(N(0,1) \leq -\frac{5}{3}\right) = \Pi(-1,666)$

$= \cancel{\ \ \ \ } = 1 - \Pi(1,666) = 1 - 0,9522$

$= 4,7\%$



par symétrie de la loi normale

lu sur la table

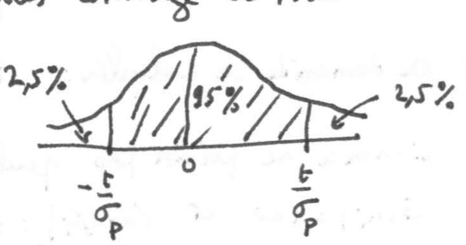
2/ On cherche les limites de confiance à 95% pour le poids de poires dans une cagette.

c'est à dire cherchons t telle que P ~~soit~~ vérifie $Prob(m_p - t \leq P \leq m_p + t) = 0,95$

où $m_p = 3000$ et $\sigma_p^2 = 3600$ $\quad P \sim N(m_p, \sigma_p^2)$, $P = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$Prob\left(-\frac{t}{\sigma_p} \leq \frac{P - m_p}{\sigma_p} \leq \frac{t}{\sigma_p}\right) = 0,95$ après centrage et réduction.

soit $Prob\left(-\frac{t}{\sigma_p} \leq N(0,1) \leq \frac{t}{\sigma_p}\right) = 0,95$



donc on cherche t tq que : $Prob\left(N(0,1) \leq \frac{t}{\sigma_p}\right) \leq 0,975$

soit $\Pi\left(\frac{t}{\sigma_p}\right) = 97,5\%$

lu sur la table $\frac{t}{\sigma_p} = 1,96$ $\quad$ soit $t = 1,96\,\sigma_p$

soit $t = 1,96 \times 60$

soit $t = 117,6$

Ainsi $Prob(3000 - 117,6 \leq P \leq 3000 + 117,60) = 95\%$

soit $Prob(2882,4 \leq P \leq 3117,60) = 95\%$

Conclusion : P est dans l'intervalle $[2,882\text{ kg} ; 3,118]$ avec une probabilité de 95%

2/ Soit P_1 le poids de poires d'une cagette n°1 et P_2 celui d'une cagette n°2

P_2 et P_1 sont deux variables aléatoires

Sous les hypothèses retenues dans les questions précédentes $P_2 \sim N(3000, 3600)$ et $P_1 \sim N(3000, 3600)$ et on rajoute l'hypothèse plausible que P_2 et P_1 sont indépendantes

On veut calculer $Prob\left(|P_2 - P_1| \leq \frac{m}{2}\right)$ m étant le poids moyen d'une poire

On cherche donc $Prob\left(-\frac{m}{2} \leq P_2 - P_1 \leq \frac{m}{2}\right) = Prob\left(-\frac{m}{2} \leq D \leq \frac{m}{2}\right)$ avec $P_2 - P_1 = D$

quelle est la loi que suit D ? D est une combinaison linéaire de 2 variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale alors $D \sim N(d, \sigma_D^2)$

tq $d = E(P_2 - P_1) = E(P_2) - E(P_1) = m_{P_2} - m_{P_1} = 0$ car Espérance est linéaire

et $\sigma_D^2 = Var(P_2 - P_1) = Var(P_2) + Var(-P_1)$ ~~car~~ P_2 et P_1 sont indépendantes

Feuille 3 exo V suite p.3

soit $\sigma_D^2 = Var(P_2) + Var(P_1)$ car $Var(aP_1) = a^2 Var(P)$

$= 3600 + 3600 = 7200$

Ainsi $Prob\left(|P_2 - P_1| \leq \frac{m}{2}\right) = Prob\left(-\frac{m}{2} \leq D \leq \frac{m}{2}\right) = Prob\left(\frac{-\frac{m}{2} - 0}{\sigma_D} \leq \frac{D - 0}{\sigma_D} \leq \frac{\frac{m}{2} - 0}{\sigma_D}\right)$

après centrage et reduction.

soit $Prob\left(|P_2 - P_1| \leq \frac{m}{2}\right) = Prob\left(\frac{-m}{2\sqrt{7200}} \leq \cancel{N}N(0,1) \leq \frac{m}{2\sqrt{7200}}\right)$

$= Prob\left(-\frac{m}{2\sqrt{2}\times 60} \leq N(0,1) \leq \frac{m}{2\sqrt{2}\times 60}\right)$ avec $m = 120$

$= Prob\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq N(0,1) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= Prob\left(-0,707 \leq N(0,1) \leq 0,707\right)$

$= \Pi(0,707) - \Pi(-707) = \Pi(0,707) - (1 - \Pi(0,707))$

$= 2\Pi(0,707) - 1$

$\simeq 2 \times 0,7602 - 1 = 0,52$

$\approx 0,52$

$\approx 52\%$

<u>Conclusion</u> : il y a 52% de chance que la difference de poids de poire entre deux cagettes n'excède pas la moitié du poids moyen d'une poire

<u>En fait</u> l'énoncé demande la probabilité pour que cette différence de poids entre deux cagettes <u>excède</u> la moitié du poids moyen d'une poire.

soit $Prob\left(|P_2 - P_1| > \frac{m}{2}\right) = 1 - Prob\left(|P_2 - P_1| \leq \frac{m}{2}\right)$

$= 1 - 0,52$

$= 48\%$

<u>Ainsi</u>, il y a 48% de chance pour que la différence de poids de poire entre deux cagettes <u>excède</u> la moitié du poids moyen d'une poire.